E.N.S. Ulm et Sèvres 1985

GROUPE C

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Introduction

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, ε un nombre réel strictement positif et f_ε l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par, si (x, y) est dans $\mathbb{R}^2$,

$$f_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} |y| & \text{si } |x| \leqslant \varepsilon \\ 0 & \text{si } |x| > \varepsilon \end{cases}.$$

Les variables aléatoires introduites dans les sections II, III et IV sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si X est une variable aléatoire réelle on note E(X) son espérance, lorsqu'elle existe.

On rappelle que la densité de la loi normale centrée réduite est la fonction :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

On considère n nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que a_{n-1} soit non nul. Pour tout nombre réel x on pose :

$$Q(x) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p \quad \text{et} \quad Q'(x) = \sum_{p=1}^{n-1} p a_p x^{p-1}.$$

Par définition une racine de Q (resp. de Q') est un nombre réel x vérifiant $Q(x) = 0$ (resp. $Q'(x) = 0$).

1° Soient u et v deux nombres réels tels que u soit strictement inférieur à v, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $|Q(u)| = |Q(v)| = \varepsilon$.

(ii) Pour tout x de $]u, v[$, $|Q(x)| < \varepsilon$.

(iii) Si x est un élément de $]u, v[$ tel que $Q'(x) = 0$, alors $Q(x) = 0$.

a. Montrer que Q a une racine et une seule contenue dans $]u, v[$.

b. Montrer que :

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_u^v |Q'(x)| \, dx = 1.$$

2° On pose $M_\varepsilon = \dfrac{1}{2\varepsilon} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon\left(Q(x), Q'(x)\right) dx$.

a. Montrer que, si les racines x de Q' vérifiant $|Q(x)| < \varepsilon$ sont aussi racines de Q, alors M_ε est égal au nombre N de racines distinctes de Q.

b. En déduire qu'en général :

$$N = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon\left(Q(x), Q'(x)\right) dx.$$

3° Soient a et b deux nombres réels tels que a soit strictement inférieur à b. Montrer que la limite suivante existe :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b f_\varepsilon\left(Q(x), Q'(x)\right) dx$$

et est supérieure ou égale au nombre de racines distinctes de Q contenues dans $]a, b[$.

II

On considère n variables aléatoires réelles indépendantes $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}$, ayant pour loi la loi normale centrée réduite. Étant donnés deux éléments $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ et $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ on pose :

$$\alpha = \left(\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p^2\right)^{1/2}, \quad \beta = \left(\sum_{p=0}^{n-1} \beta_p^2\right)^{1/2}, \quad \gamma = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \beta_p \text{ et } \Delta = \alpha^2 \beta^2 - \gamma^2.$$

Dans toute la suite on supposera que α est non nul. On définit trois variables aléatoires réelles U, V, W par :

$$U = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \Lambda_p, \quad V = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p \Lambda_p, \quad W = V - \frac{\gamma}{\alpha^2} U.$$

1° *a.* Calculer la densité de U.

b. Déterminer $E(W^2)$ et la covariance cov (U, W).

c. Montrer que Δ est positif ou nul.

2° On suppose dans ce paragraphe que Δ est non nul. On admettra que sous les hypothèses précédentes les variables aléatoires U et W sont indépendantes.

a. En exprimant (U, V) en fonction de U et W, calculer la densité $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ du couple (U, V).

b. Pour tout réel x on pose :

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \, h(x, y) \, dy$$

Montrer que la fonction H est continue (on pourra transformer à l'aide d'un changement de variables l'expression considérée et se ramener à une somme de fonctions clairement continues).

c. Montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} E\left\{ f_\varepsilon (U, V) \right\} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi \alpha^2}.$$

3° Montrer que le résultat de la question 2° *c* reste vrai lorsque Δ est nul.

III

Si $A_0, \ldots, A_{n-1}$ sont les variables aléatoires introduites au II on pose, pour tout nombre réel x :

$$Q_n(x) = \sum_{p=0}^{n-1} A_p x^p \quad \text{et} \quad Q'_n(x) = \sum_{p=0}^{n-1} p A_p x^{p-1}$$

(remarquer que pour x fixé, $Q_n(x)$ et $Q'_n(x)$ sont des variables aléatoires réelles).

On note N_n le nombre de racines distinctes de la fonction Q_n. La relation établie au I. 2° *b* montre que :

$$E(N_n) = E\left\{ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon \left(Q_n(x), Q'_n(x) \right) dx \right\}.$$

On admettra que ceci entraîne ici que :

$$E(N_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} E\left\{ f_\varepsilon \left(Q_n(x), Q'_n(x) \right) \right\} dx.$$

1° Pour tout x de $]0, 1[$ on pose $f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $g(x) = \dfrac{x f'(x)}{f(x)}$ et $\Psi(x) = f^2(x) g'(x)$ (où f' et g' sont les dérivées de f et g).

a. Montrer que :

$$\Psi(x) = \frac{1}{(x-1)^4} \left\{ (x^n - 1)^2 - (x - 1)^2 n^2 x^{n-1} \right\}.$$

b. Montrer que :

$$\left(\sum_{p=0}^{n-1} x^p \right) \left(\sum_{p=0}^{n-1} p^2 x^{p-1} \right) - \frac{1}{x} \left(\sum_{p=0}^{n-1} p x^p \right)^2 = \Psi(x).$$

2° Pour tout nombre réel x différent de 1 et -1 on pose :

$$h_n(x) = \frac{n x^{n-1} (1 - x^2)}{1 - x^{2n}}.$$

a. Montrer que $h_n(x) = h_n\left(\frac{1}{x}\right)$ si x est différent de 0,1 et -1.

b. Montrer que :

$$E(N_n) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \{ h_n(x) \}^2}}{1 - x^2} dx.$$

3° Pour tout x de $[0, 1[$ on pose $g_n(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \{ h_n(x) \}^2}}{1 - x^2}$. Montrer que, si $0 < x < 1$,

(i) $n x^{n-1} \geqslant h_n(x) \geqslant x^{n-1}$.

(ii) $1 - \{ h_n(x) \}^2 \leqslant 2n (1 - x)$.

(iii) $\{ g_n(x) \}^2 \leqslant \dfrac{2n}{1 - x}$.

(iv) $g_n(x) \leqslant \dfrac{1}{1 - x^2}$.

4° En étudiant séparément $\int_0^{1 - \frac{1}{n}} g_n(x) \, dx$ et $\int_{1 - \frac{1}{n}}^1 g_n(x) \, dx$

montrer qu'il existe un nombre r indépendant de n tel que :

$$E(N_n) \leqslant \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} n + r .$$

5° Vérifier que pour tout a de $]0, 1[$ tel que na^{n-1} soit inférieur à 1 :

$$E(N_n) \geqslant \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - n^2 a^{2(n-1)} \right\}^{1/2} \operatorname{Log} \frac{1}{1-a} .$$

En choisissant a de la forme $1 - n^{\theta-1}$ montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E(N_n)}{\operatorname{Log} n} = \frac{2}{\pi} .$$

6° Soient u et v deux nombres réels tels que u soit strictement inférieur à v et tels que ni 1, ni -1 soient dans $[u, v]$. On note $N_n^{u,v}$ le nombre de racines distinctes de Q_n contenues dans $]u, v[$. On admettra que :

$$E(N_n^{u,v}) \leqslant \int_u^v \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \; E \left\{ f_\varepsilon (Q_n(x), Q'_n(x) \right\} dx .$$

Montrer qu'il existe un réel k indépendant de n tel que :

$$E(N_n^{u,v}) \leqslant k .$$